Aula 2

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E MEDIDAS DE POSIÇÃO

META

Visualizar o comportamento de um conjunto de dados por intermédio de um único valor, neste caso representado pelo parâmetro médio, bem como em relação a algum parâmetro especifico dos dados observados.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o estudante deverá:

Calcular parâmetros médios, principalmente a Média Aritmética, para dados agrupados em Rol, bem como para aqueles organizados em distribuições de freqüências por valores ou intervalos de valores.

Calcular outros parâmetros como Moda e Mediana, sabendo avaliar para qual tipo de dados eles são mais indicados do que a média aritmética.

PRÉ-REQUISITO

Todo o conhecimento da primeira aula e ter em mãos: Papel, Calculadora ou Computador para realização dos cálculos.

INTRODUÇÃO

Olá! Tudo bem? Você já revisou os ensinamentos da primeira aula? O conteúdo dela vai ajudar bastante no desenvolvimento das atividades relacionadas nesta aula.

A partir desta aula vamos iniciar o uso da Estatística Descritiva a começar pelo cálculo de alguns parâmetros como: média aritmética, moda e mediana, dos quais a média é o mais importante além de ser o de maior utilização.

Mais uma vez a aula ora apresentada servirá de guia para orientá-lo na realização destes cálculos, cabe a você fazer uso destas ferramentas e usar passo a passo a metodologia indicada, isto é: fazer a aula.

Apesar de começarmos a parte cálculos, não existem motivos para preocupação. O uso do instrumental estatísticos no estudo de varáveis continua sendo fácil, você só precisa ter atenção e acreditar no seu potencial. São metodologias bastante simples, envolvendo apenas o conhecimento das operações básicas da matemática.

Além do cálculo destes parâmetros é importante saber interpretar e entender suas finalidades e quando podem ser utilizados. Lembre-se que você partiu de informações oriundas de uma pesquisa ou de um banco de dados, organizou e pode resumir tudo em tabelas. Deve agora calcular algum tipo de parâmetro que vai representar este conjunto de dados sempre que venha a fazer alguma referencia aos mesmos ou iniciar um processo de análise.

MEDIDAS DE POSIÇÃO

Média Aritmética ($\bar{x}$)

Média Aritmética de uma série de valores $x_i = x_1, x_2, ..., x_n$, é a razão entre a soma de todos os valores e o número de termos da série

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad e \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Propriedades da Média Aritmética

1. A soma algébrica da diferença entre cada valor observado e a média aritmética é nula: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} = 0)$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \mathbf{n}\bar{x} - \mathbf{n}\bar{x} = \mathbf{0}$$

2. A média de uma constante é a própria constante.

$$\mathbf{x_i = a, a, a, a, ..., a} \qquad \bar{x} = \frac{a+a+\ldots+a}{n} = \frac{na}{n} = a$$

3. A média aritmética de uma série de valores é igual a um número arbitrário somado algebricamente à média dos desvios tomados em relação a esse número.

$$\bar{x} = \mathbf{A_0} + \frac{\sum \mathbf{di}}{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{di} = x_i - \mathbf{A_0}$$

$$\bar{x} = \mathbf{A_o} + \frac{\sum \mathbf{f_i} \alpha_i}{\sum \mathbf{f_i}} .\mathbf{h} \qquad \alpha_i = \frac{x_i - \mathbf{A_0}}{\mathbf{h}}$$

4. A média aritmética de duas ou mais séries de valores é um parâmetro ponderado entre as médias de cada série e respectivos números de termos.

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \ldots + nk\bar{x}k}{n_1 + n_2 + nk} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum ni\bar{x}i}{\sum ni}$$

5. Somando ou subtraindo uma constante a todos os valores da série, a média ficará aumentada ou diminuída, respectivamente, dessa constante.

$$\text{Soma} \Rightarrow \mathbf{x_i = (x_1 + a);\ (x_2 + a);\ ...\ (x_n + a)}$$

$$\text{Média} = \frac{\mathbf{(x_1 + a) + (x_2 + a) + \ldots + (x_n + a)}}{n} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a}$$

6. Multiplicando ou dividindo todos os valores de uma série por uma constante ($\neq$ de zero) a média ficará multiplicada ou dividida pelo valor desta constante.

$$\text{Multiplicação} \Rightarrow \mathbf{x_i = ax_1, ax_2, ..., ax_n}$$

$$\text{Média} = \frac{\mathbf{ax_1 + ax_2 + ... + ax_n}}{\mathbf{n}} = \mathbf{a\bar{x}}$$

Média Aritmética Ponderada

Em algumas séries determinados valores são mais significativos que outros, merecendo por isto tratamento especial, de acordo o grau de importância de cada valor da variável. Neste caso a média é a relação entre a soma dos produtos de cada valor pelos respectivos pesos
($p_i = p_1, p_2, ..., p_n$) ou freqüências de valores ($f_i = f_1, f_2, ..., f_n$).

$$\bar{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + ... p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \quad \text{ou} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

Neste caso a variável pesquisada é ponderada pelas freqüências simples absoluta.

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DA MÉDIA ARITMÉTICA

- É descritiva de todos os dados de uma série e de fácil compreensão.
- Depende de cada valor da série e qualquer alteração de um deles altera o seu valor.
- É influenciada por valores extremos, podendo, em alguns casos, não representar a série.
- Representa uma série cujos valores estão ou se aproximam de uma progressão aritmética.
- É das medidas de tendência central a de maior emprego.
- Tem grande aplicação nas distribuições simétricas.
- Não pode ser calculada para distribuições com limites indeterminados.

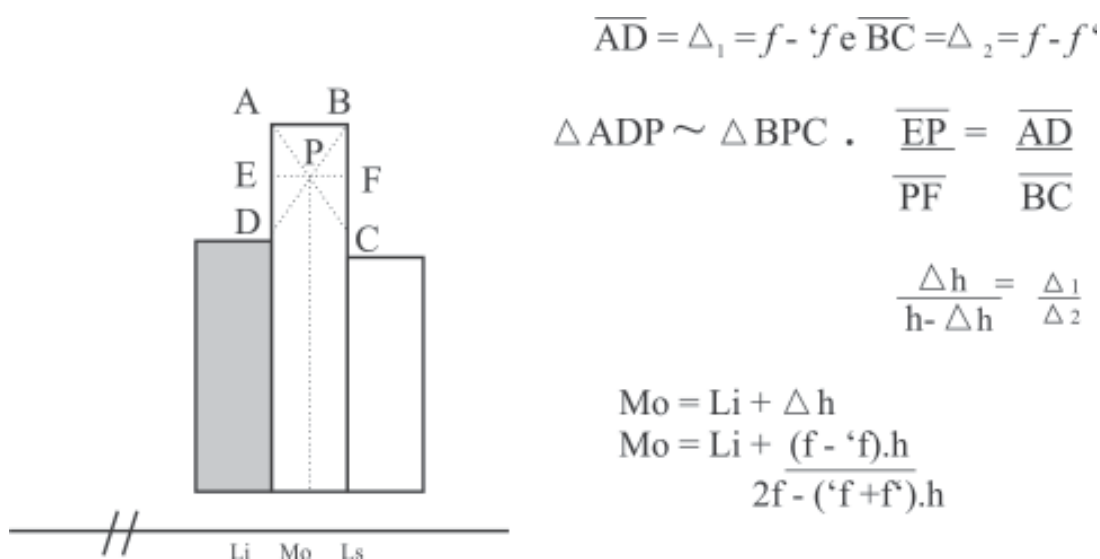
Moda (M_o)

Dada uma série de n valores $x_i = x_1, x_2,.....,x_n$, denominamos Moda o valor que ocorre com maior freqüência.

Em relação à moda as séries estatísticas podem ser: **Amodal -** quando não possui moda. **Modal -** quando possui uma moda. **Bimodal** - quando possui duas modas. **Plurimodal -** quando possui várias modas.

Moda para dados agrupados em Distribuição de Freqüências.
Classe Modal - é a classe que possui a maior freqüência.

Moda Bruta - é o ponto médio da classe modal.

PROCESSO DE CZUBER

Relação Empírica de Pearson ⇒ $M_o = 3\ M_e - 2\ \overline{X}$ Aplicável em distribuições de fraca assimetria:

Principais características da Moda

- É medida de posição
- Tem boa aplicação quando se deseja assinalar o valor mais comum ou típico.
- É menos estável do que a média aritmética e apresenta grande instabilidade na amostra.

- Não se deixa influenciar pelas flutuações extremas, visto que não depende de todos os valores da série.
- A existência de limites indefinidos não impede que seja calculada a moda da distribuição.
- Apresenta a desvantagem de não se adaptar ao tratamento algébrico.
- Não perde seu significado mesmo nas distribuições assimétricas.
- Sempre tem existência real, ou seja, sempre é representada por um elemento do conjunto de dados, exceto quando os dados estão agrupados em distribuição de freqüência.

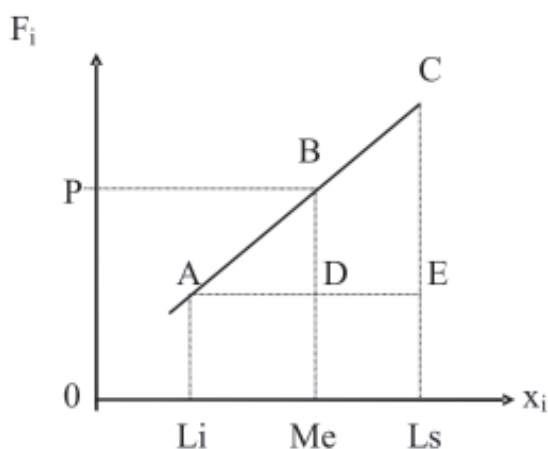
Mediana (M_e)

Mediana de uma série de "n" termos $x_i = x_1, x_2. .... x_n$, ordenados, é o elemento que separa a série em dois subconjuntos, de modo que seja precedido e seguido pelo mesmo número de ocorrências.

Posição da Mediana para dados não tabulados por classes: $P = \frac{n + 1}{2}$.

Para série com número ímpar de termos a mediana é o termo central da série. Caso n seja par a mediana é a média aritmética entre os termos centrais da série.

Para dados agrupados em distribuição de freqüências por classes, a Mediana encontra-se na classe mediana que é identificada pelas freqüências acumuladas. $\left(P = \frac{n}{2}\right)$

Cálculo da mediana para dados agrupados em distribuição de freqüência por classe

$\overline{CE} = f_i$; $\overline{BD} = P - 'F_i$ e $\overline{AE} = h$

$AD = M_e - L_i = \Delta h$ $\Delta ACE \sim \Delta ABD$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{f}{h} = \frac{P - 'F_i}{M_e - L_i} \Rightarrow M_e = L_i + \frac{(P - 'F_i) \cdot h}{f}$$

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DA MEDIANA

- Tem boa aplicação em séries de valores que há resultados extremos que afetariam de maneira acentuada a média (Renda Nacional, etc.).
- A soma dos valores absolutos de todos os desvios referente a mediana é mínima em relação aos desvios absolutos referentes a outro valor;
- Não se deixa influenciar pela magnitude dos termos extremos;
- É a abcissa de ordenada que divide a área da curva em duas partes iguais;
- Apresenta grande instabilidade na amostra. Se extrairmos amostras distintas de uma mesma população, a diferença que existe, em geral, entre as médias, é menor que a que se pode observar entre suas respectivas medianas;
- É influenciada pela posição ou localização dos valores e não pela magnitude deles.

Separatrizes

Quartil (Q), Decil (D) e Centil (C) são separatrizes que dividem a série em quatro (4), dez (10) e cem (100) partes iguais respectivamente.

A posição das separatrizes para dados não agrupados segue o mesmo critério da Mediana.

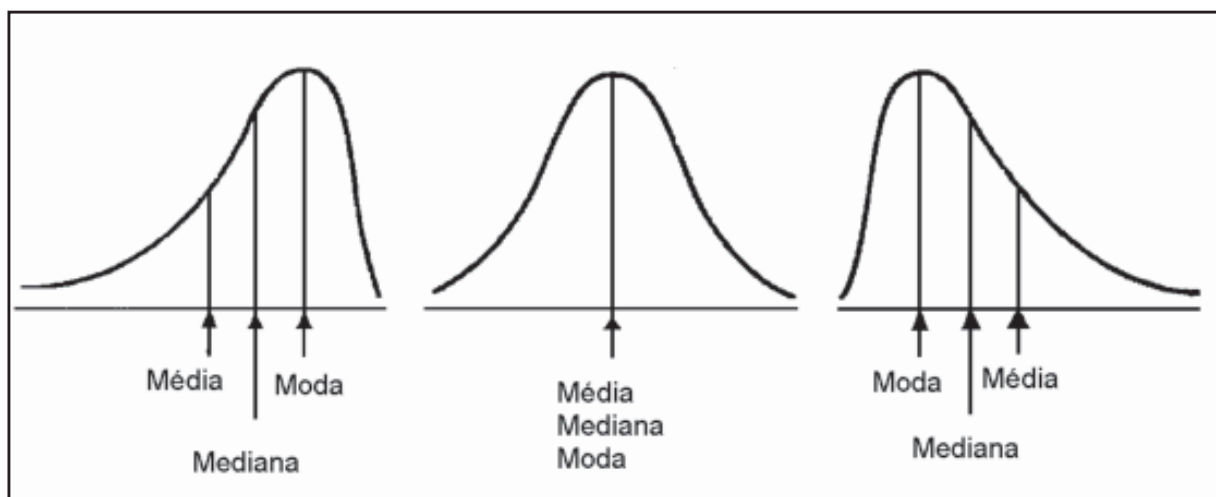
Para dados agrupados em Distribuição de Freqüências por classes a posição das separatrizes é dada pela relação: $P = \frac{k \cdot n}{i}$, com classes identificadas pelas freqüências acumuladas.

Para cálculo do valor de qualquer Separatriz utiliza-se a equação da mediana, visto que ela própria é uma separatriz. $Me = Q_2 = D_5 = C_{50}$

RELAÇÃO ENTRE MÉDIA ARITMÉTICA, MODA E MEDIANA.

Em geral a moda é menos empregada, sendo adequada para caracterizar situações onde estejam em causa os valores mais freqüentes. Por

exemplo: em estudos de mercado, o principal interesse pode ser pesquisar os produtos que mais se vendem.

Corretamente a escolha é feita entre a média e a mediana. Em alguns casos a mediana é mais resistente do que a média, principalmente nas séries assimétricas, por não ser influenciada pelos valores extremos. Já a média tem vantagens quando a curva de freqüência é mais ou menos simétrica, transformando-a num bom estimador de parâmetros populacionais, através de dados amostrais.

Quando a distribuição é simétrica, sua média, moda e mediana coincidem. Caso contrário à média e a mediana se deslocam mais em direção dos valores extremos, a média mais que a mediana. Portanto em qualquer distribuição:

- a moda é sempre a abcissa de ordenada máxima;
- a mediana se situa sempre entre a moda e a média aritmética;
- a média aritmética se situa sempre ao lado da cauda de distribuição.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dez medidas do diâmetro de um cilindro foram anotadas por um cientista como: 3,88; 4,09; 3,92; 3,97; 4,02; 3,95; 4,03; 3,92; 3,98 e 4,06 polegadas. Determinar a média aritmética.

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{3,88 + 4,09 + 3,92 + 3,97 + 4,02 + 3,95 + 4,03 + 3,98 + 3,92 + 4,06}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{39,82}{10} = 3,89 \text{ polegadas}$$

2. Entre 100 números, vinte são 4, quarenta são 5, trinta são 6 e os restantes são 7. Determinar a média aritmética dos números.

Solução:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{80 + 200 + 180 + 70}{100} \Rightarrow \bar{x} = 5{,}30$$

3. Determinar a mediana das distribuições abaixo:

$x_i = 9; 11; 14; 15; 17; 19; 23; 28$ e $y_i = 2; 5; 7; 10; 13; 17; 20;$

$$M_e = \frac{15 + 17}{2} = 16 \qquad M_e = 10$$

4. Determinar a moda das distribuições abaixo:

$x_i = 2; 3; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 7$ e $y_i = 2; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 7$

$M_o = 6$ $M_o = 4$

5. Achar a mediana dos seguintes valores:

46 47 49 51 54 53 53 57 58 58 59 62 65 67 71 71 73 76 79

$$P = \frac{n + 1}{2} = \frac{19 + 1}{2} = 10^{o} \qquad Me = 58 \text{ (termo central)}$$

6. Calcular a Média Aritmética, Mediana e Moda da idade relativa a um grupo de 350 pessoas:

Idade (anos)	Nº de pessoas	x_i	α_i	$f_i\alpha_i$	F_i	$f_i\alpha_i^2$
10 |—15	2	12,5	-2	-4	2	8
15 |—20	50	17,5	-1	-50	52	50
20 |—25	120	22,5	0	0	172	0
25 |—30	60	27,5	1	60	232	60
30 |—35	110	32,5	2	220	342	440
35 |—40	8	37,5	3	24	350	72
Σ	350	-	-	250	-	630

$$\bar{x} = A_0 + \frac{\sum f_i \alpha_i}{\sum f_i} . h = 22,5 + \frac{250}{350} . 5 \Rightarrow \bar{x} = 26,07$$

$$M_e = L_i + \frac{P - 'F_i}{f_i} . h = 25 + \frac{(175-172)}{60}.5 \Rightarrow \quad M_e = 25,25$$

$$M_o = L_i + \frac{f - 'f}{2f-('f + f')} .h = 20 + \frac{(120 - 50)}{240 - 110} .5 \Rightarrow \quad M_o = 22,69$$

ATIVIDADES

1. Encontrar a freqüência correspondente à terceira classe da distribuição abaixo, sabendo-se que a média é igual a 11,50.

x_i	5	8	13	18	25
f_i	4	5	...	3	1

2. As notas finais de um estudante em matemática, estatística, português e história são respectivamente 82, 86, 91e 71, atribuindo-se a essas disciplinas, respectivamente, os pesos 3, 5, 3, 1 a média aritmética será.

3. As estaturas de dois grupos de indivíduos, o primeiro com 300 integrantes e o segundo com 124, as médias aritméticas foram respectivamente 166,82cm e 161,92cm. Qual a média aritmética do conjunto?

4. Trinta e seis estudantes foram submetidos a um exame de biologia, obtendo as seguintes notas: Construa uma distribuição de freqüência por classe. Determine a média, a mediana e o desvio padrão.

93 98 72 84 88 90 78 80 89 94 95 77 81 75 72 76 70
76 83 99 73 83 87 91 83 92 90 92 77 86 86 74 87 81
98 94

5. Determinar a média e o desvio padrão relativo ao nº. de acidentes por dia em certa rodovia:

Nº de acidentes	0	1	2	3	4
Nº de dias	15	16	12	9	8

6. Calcule o salário médio horário de 100 funcionários de uma clínica, onde 60 empregados recebem R$ 0,80 / h; 30 recebem R$ 1,20 /h e os demais ganham R$ [illegible],00 / h.

7. Em certa Empresa trabalham 4 analistas de mercado, 2 supervisores, 1 chefe de seção e 1 gerente, que ganham respectivamente: Rr$ 130,00; Rr$ 160,00; Rr$ 175,00 e Rr$ 250,00. Qual o valor do salário médio desses funcionários. R$ 158,12

8. Os custos médios de produção dos produtos A, B e C foram, respectivamente R$10,00 , R$12,00 e R$15,00. Determine o custo médio dos três produtos, sabendo que em um mês, foram produzidas 1.000 unidades do produto A, 500 do produto B e 500 unidades do produto C.

9. Uma amostra de 20 volumes transportados pelo correio aéreo, apresentou os seguintes pesos: 1 volume com 6 kg, 3 com 3 kg, 5 com 2kg, 3 com 1,3 kg, 6 com 1kg e 2 com 0,5kg. Qual o peso médio desses volumes?

10. A soma dos pesos dos componentes de uma equipe de Vôlei corresponde a 648kg. A relação entre o número de componentes e a média aritmética é de 1/8. Determinar o número de componentes do grupo e a média dos pesos.

11. Em uma prova de estatística a turma A de 30 alunos obteve média de rendimento igual a 6 e a turma B, de 42 alunos, média de 5. A média de rendimento das duas turmas foi:

12. O salário médio anual de todos os empregados de uma loja foi de R$ 5.000,00. Os salários médios pagos aos empregados do sexo masculino e feminino da loja foram R$ 5.200,00 e R$ 4.200,00 respectivamente. Qual a percentagem de empregados de cada sexo.

13. Para um dado concurso, 60% dos candidatos eram do sexo masculino e conseguiram média de 70 pontos em determinada prova. Sabendo-se que a média geral dos candidatos (independentemente do sexo) foi de 64 pontos, qual a média dos candidatos do sexo feminino?

14. A nota média de uma turma mista de 50 alunos foi 5,3, sendo 5,0 a média dos meninos e 8,0 das meninas. Quantos meninos e meninas havia na turma?

15. O salário médio pago aos empregados da firma é R$ 7.100,00 . Os salários médios pagos aos empregados especializados e não especializados são respectivamente $ 8.000,00 e R$ 5.000,00. Determinar a porcentagem dos empregados especializados e não especializados da firma.

CONCLUSÃO

Depois desta aula, você deve ser capaz de calcular pelas várias metodologias apresentadas qualquer tipo de parâmetro de tendência central ou de posição. Além disto, deve entender o significado de cada um deles, como são utilizados e o que representa para qualquer conjunto de dados seja ele amostra ou população.

Do mesmo modo também é muito importante saber trabalhar e compreender as principais propriedades destes parâmetros, bem como indicar com segurança o seu uso de acordo com o comportamento da variável pesquisada.

Com o andamento do curso você vai perceber que o cálculo de parâmetros vai facilitar e complementar o entendimento de outras aulas, além de já ser um dos instrumentos da estatística imprescindível nos estudos e análises de pesquisas.

Agora você já sabe o que é uma média aritmética como ela é calculada e que representa. Já é capaz de avaliar, por exemplo, o peso individual de um grupo de alunos, e transformar tudo isto em um valor médio que represente todos os pesos. Da mesma maneira vai também saber aplicar a moda e mediana nas séries estatísticas especificas para estes parâmetros.

Você já é capaz de estabelecer critérios para organização de informações de um Banco de Dados, visando o calculo destes parâmetros para analises e interpretações.

Não deixe de recorrer a esta aula sempre que senti necessidade, vai encontrar nos temas aqui tratados uma base de informações bem detalhada e de fácil compreensão.

No final da aula temos uma lista de exercícios para serem resolvidos em grupos de no máximo cinco pessoas ou individual.

RESUMO

Nesta aula você aprendeu o significado de Medidas de Tendência Central (parâmetros aqui representados pela Média Aritmética, Moda e Mediana), e como devem ser utilizados para avaliar o comportamento de conjuntos de dados.

Também tomou conhecimento das principais propriedades destas Medidas Estatísticas e quais as situações de melhor aplicação, isto é: Você já sabe observando os dados que tem em mãos se deve calcular uma média aritmética, moda ou mediana.

Aprendeu a utilizar mais de uma metodologia para cálculo destes parâmetros, obtendo com certeza o mesmo valor independente da

metodologia utilizada. Também tomou conhecimento e agora já sabe que estes parâmetros quando calculados a partir de um rol de informações ou de uma distribuição de freqüência por valores apresentam sempre os mesmos resultados. Porém, quando os dados de um rol são agrupados em distribuição de freqüências por classe os resultados obtidos para estas medidas apresentam alguma diferença, porém elas não são significativas, principalmente para grandes amostras.

Como a média aritmética é o parâmetro mais importante e de uso mais freqüente também será mostrado nesta aula como encontrar o valor desta medida para variáveis cujos valores são ponderados por pesos, que são atribuídos de acordo com a importância de cada elemento no conjunto. Ao calcular a nota média de um aluno resultante de duas avaliações, sendo uma escrita e uma outra oral, você vai observar que o valor deste parâmetro vai depender das notas obtidas em cada avaliação, bem como do peso a ser atribuído a cada prova.

Conhecendo estes parâmetros e sua aplicação você começa a dar os primeiros passos dentro da Estatística Descritiva, além de já dispor elementos para uma breve interpretação e analise de dados estatísticos.

AUTO-AVALIAÇÃO

Sou capaz de calcular Média Aritmética, Moda e Mediana de Populações a Amostras?

Sou capaz de aplicar corretamente as Medidas de Tendência Central, para conjuntos de dados investigados?

Sou capaz de entender o significado destas Medidas e como utilizá-las?

PRÓXIMA AULA

Vai tratar de assuntos relativos ao calculo de Dispersão, Assimetria e Curtose. Para isto é fundamental que você esteja lembrado do que aprendeu nesta aula, principalmente sobre média aritmética.

REFERÊNCIAS

RODRIGUES, PEDRO CARVALHO. **Bioestatística**. Universidade Federal Fluminense.
FONSECA, JAIRO DA. **Curso de Estatística**. Editora Atlas.
OLIVEIRA, FRANCISCO ESTEVAM MARTINS DE. **Estatística e Probabilidade**. Editora Atlas.
TANAKA. **Elementos de Estatística**. Editora McGraw.Hill.
BARBETTA, PEDRO A. **Estatística aplicada as Ciências Sociais**. Editora da UFSC.
GÓES, LUIZ A. C. **Estatística I e II**. Editora Saraiva.
DÍAZ, FRANCISCA; LOPES, FRANCISCO JAVIER. **Bioestatística**. Editora Thomson.